

Oscillateur harmonique

1

On appelle **signal physique** une grandeur physique dépendant du temps. Dans cette partie du cours, on s'intéressera surtout à des **signaux périodiques**. Un signal périodique est un signal qui se reproduit identique à lui-même au cours du temps. Le plus fondamental des signaux périodiques est le **signal sinusoïdal**.

Dans ce chapitre, on introduit un modèle physique qui produit un signal sinusoïdal appelé l'**oscillateur harmonique**. Les adjectifs harmonique et sinusoïdal sont synonymes : on rencontre parfois les expressions « signal harmonique » ou « oscillateur sinusoïdal ».

L'exemple étudié dans ce chapitre est un oscillateur harmonique mécanique. Cependant on retrouve ce modèle dans bien d'autres domaines de la physique, notamment l'électricité.

1 Un oscillateur harmonique mécanique

1.1 Système étudié

Le système mécanique oscillant le plus simple est une masse accrochée à un ressort.

On considère dans ce paragraphe un mobile de masse m qui se déplace sans frottement le long d'une tige horizontale (figure 1.1). Sa position est repérée par l'abscisse x de son centre d'inertie G mesurée sur l'axe (Ox) matérialisé par la tige. On choisit de placer l'origine de l'axe (Ox) de manière que G coïncide avec O dans la position d'équilibre (voir figure 1.1).

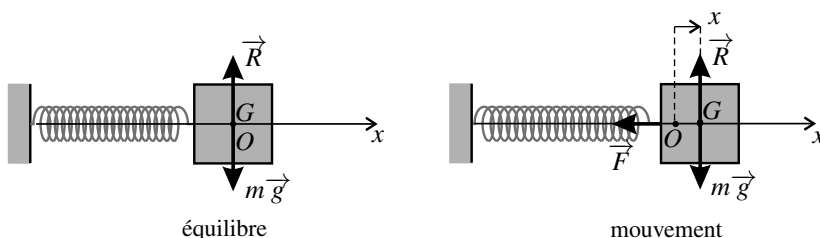


Figure 1.1 – Un exemple d'oscillateur harmonique mécanique.

1.2 Obtention d'une équation différentielle

a) Forces s'exerçant sur le système

Le ressort exerce sur le mobile une force qui s'écrit :

$$\vec{F} = -kx\vec{u}_x,$$

où k est la **constante de raideur** du ressort. Cette force est une force de rappel : son sens est opposé au sens du déplacement du mobile par rapport à sa position d'équilibre (la position $x = 0$). Lorsque x est positif, la force est de sens opposé à \vec{u}_x et inversement. On trouvera plus de renseignements sur la force d'un ressort dans le chapitre *Principes de la dynamique newtonienne*.

Le mobile est aussi soumis à son poids $m\vec{g}$ ainsi qu'à une réaction \vec{R} de la tige. Ces deux forces sont verticales et n'ont pas d'influence sur le mouvement qui est horizontal.

b) Application du principe fondamental de la dynamique

Le mouvement du mobile est régi par le principe fondamental de la dynamique (ou troisième loi de Newton), qui s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

où \vec{p} est la quantité de mouvement du mobile. En notant \vec{v}_G la vitesse instantanée du centre d'inertie G du mobile, on a :

$$\vec{p} = m\vec{v}_G = m\frac{dx}{dt}\vec{u}_x.$$

Dans cette relation, $\frac{dx}{dt}$ est la dérivée de la fonction $x(t)$. On notera $\frac{d^2x}{dt^2}$ la dérivée seconde de cette fonction. Le principe fondamental de la dynamique conduit donc à la relation, vérifiée à chaque instant : $\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\vec{u}_x\right) = -kx\vec{u}_x$, soit : $m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$, soit après simplification :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (1.1)$$

La relation qui vient d'être obtenue est appelée **équation différentielle**. Une équation différentielle est une relation entre une fonction $x(t)$ et ses dérivées par rapport au temps $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ..., qui est vérifiée à chaque instant. Ici, on a trouvé une équation du deuxième ordre, car l'ordre de dérivation le plus grand qui apparaît dans l'équation (le seul ici, mais il pourrait y en avoir plusieurs) est égal à deux.

1.3 Définition d'un oscillateur harmonique

L'équation différentielle (1.1) est une équation différentielle d'oscillateur harmonique.

On appelle **oscillateur harmonique** un système physique décrit par une grandeur $x(t)$ dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t) \quad (1.2)$$

où ω_0 est une constante réelle positive qui est appelée **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique et qui s'exprime en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Remarque

L'unité de ω_0 se déduit de l'homogénéité de l'équation différentielle. En effet, la dérivée seconde par rapport au temps a pour dimension physique la dimension de x divisée par un temps au carré. Donc ω_0^2 a la dimension des s^{-2} et ω_0 a la dimension des s^{-1} . Le radian n'a pas de dimension physique.

La masse accrochée au ressort du paragraphe précédent est un oscillateur harmonique mécanique, de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

On en verra d'autres exemples, en mécanique ou en électricité.

1.4 Résolution de l'équation différentielle

a) Position du problème

Résoudre une équation différentielle consiste à trouver l'expression de la fonction inconnue $x(t)$ qui vérifie cette relation. Mais l'équation ne détermine pas de manière unique $x(t)$. Parmi les fonctions qui la vérifient, on doit choisir celle qui respecte des **conditions initiales** qui sont connues *a priori*.

Pour une équation du deuxième ordre, comme l'équation d'un oscillateur harmonique, les conditions initiales consistent en la donnée :

- de la valeur de la fonction inconnue à l'instant initial $t = 0$: $x(0)$,
- de la valeur de la dérivée première de la fonction inconnue à l'instant initial : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}$.

On va résoudre cette équation dans le cas du mobile accroché au ressort. Les conditions initiales sont :

- la position initiale : $x(0) = x_0$,
- la vitesse initiale : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0$.

b) Solutions dans deux cas particuliers

Cas où $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$. On considère la fonction :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (1.3)$$

où x_0 est une constante. On a alors, en utilisant des formules classiques de dérivation (voir l'appendice mathématique) :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega_0 t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(-\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)) = -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

Ainsi cette fonction $x(t)$ vérifie l'équation différentielle (1.1).

À quelle situation physique la solution trouvée correspond-elle ? Les conditions initiales vérifiées sont :

$$x(0) = x_0 \cos(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = \omega x_0 \sin(0) = 0.$$

Il s'agit du cas où on lâche le mobile dans la position $x = x_0$ sans lui communiquer de vitesse initiale. Dans ce cas, $x(t)$ oscille entre $-x_0$ et x_0 puisque la fonction cosinus oscille entre -1 et 1 (voir figure 1.2).

Cas où $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$ On peut imaginer une autre manière de lancer le mobile : sans l'écarter de sa position d'équilibre, lui communiquer une vitesse $v_0 \vec{u}_x$. Quelle est alors la loi du mouvement $x(t)$? Les conditions initiales que doit vérifier cette solution sont :

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0.$$

La fonction : $x(t) = b \sin(\omega_0 t)$, où b est une constante est aussi une solution de l'équation différentielle du mouvement comme le montre le calcul suivant :

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 b \cos(\omega_0 t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\omega_0 b \cos(\omega_0 t)) = -\omega_0^2 b \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

Elle vérifie les conditions initiales si : $x(0) = b \sin(0) = 0$, et si : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = \omega_0 b \cos(0) = v_0$.

Il faut donc que : $b = \frac{v_0}{\omega}$. Finalement, la solution de l'équation différentielle correspondant à ces conditions initiales est :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \tag{1.4}$$

Cette solution $x(t)$ oscille entre $-\frac{v_0}{\omega_0}$ et $\frac{v_0}{\omega_0}$ puisque la fonction sinus oscille entre -1 et 1 (voir figure 1.2).

c) Solution pour des conditions initiales quelconques

On peut vérifier facilement que la somme des deux solutions précédemment trouvées,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \tag{1.5}$$

est aussi une solution de l'équation différentielle et qu'elle vérifie les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0$. On a ainsi la solution pour un jeu de conditions initiales quelconque. Sur la figure 1.2 on voit que $x(t)$ oscille entre deux valeurs opposées $-A$ et A .

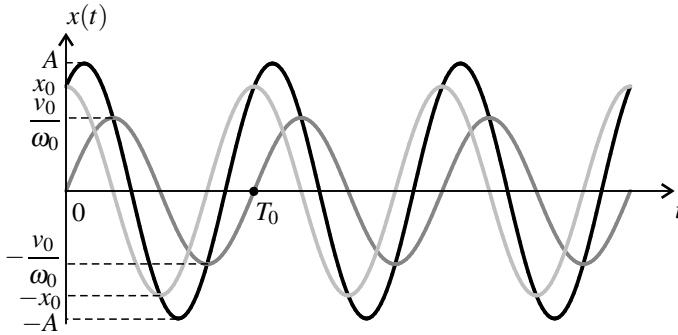


Figure 1.2 – Représentation graphique de $x(t)$ en fonction de t . En gris clair : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$; en gris foncé : cas $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$; en noir : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$. La période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (voir paragraphe 2).

d) Généralisation

La solution de l'équation de l'oscillateur harmonique (1.2) est de la forme :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

où a et b sont des constantes fixées par les conditions initiales.

1.5 Conservation de l'énergie mécanique

Lorsqu'il est en mouvement le mobile possède une **énergie cinétique** qui se calcule par la formule :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Le ressort quant à lui n'a pas de masse donc pas d'énergie cinétique, mais il possède une énergie appelée **énergie potentielle** liée à sa déformation et dont on admettra ici l'expression :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$

La somme de ces deux énergies est l'**énergie mécanique** :

$$E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Que valent ces énergies au cours du temps ?

Si l'on injecte la solution $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ dans les expressions précédentes

on trouve :

$$\begin{aligned} E_c(t) &= \frac{1}{2}m(-\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t))^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + v_0^2 \cos^2(\omega_0 t) - 2\omega_0 x_0 v_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E_p(t) &= \frac{1}{2}k \left(x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}k \left(x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t) + 2x_0 \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \right) \\ &= \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + v_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + 2\omega_0 x_0 v_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)), \end{aligned}$$

en utilisant la relation $k = m\omega_0^2$. L'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_m(t) &= E_p(t) + E_c(t) \\ &= \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) + v_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))) \\ &= \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2) = \frac{1}{2}k \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \right) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

en utilisant encore la relation $k = m\omega_0^2$. L'énergie mécanique est donc constante dans le temps. On reconnaît dans la dernière expression la valeur de l'énergie mécanique à l'instant initial. Ce résultat est cohérent avec le fait que l'on étudie un système idéalisé dont l'amortissement est négligé : on ne prend en compte aucun type de frottement. C'est pourquoi il y a conservation de l'énergie mécanique.

Remarque

Dans les deux cas particuliers du paragraphe b) on fournit son énergie au système :

- sous forme d'énergie potentielle uniquement quand $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$;
- sous forme d'énergie cinétique uniquement quand $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$.



L'équation différentielle (1.1) peut être établie à partir de la relation de conservation de l'énergie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = \text{constante}$. En effet, il vient si l'on dérive par rapport au temps :

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + kx(t) \frac{dx}{dt} = 0,$$

ce qui redonne l'équation différentielle (1.1), après simplification par le terme $\frac{dx}{dt}$.

1.6 Amplitude et période du mouvement

a) Amplitude du mouvement

L'amplitude A du mouvement est la valeur maximale atteinte par $x(t)$. Dans le cas où $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$, $A = x_0$; dans le cas où $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$, $A = \frac{v_0}{\omega_0}$. Quelle est l'expression de A dans le cas général où $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$?

On peut utiliser la conservation de l'énergie : lorsque $x(t)$ passe par la valeur maximale A , sa dérivée est nulle donc l'énergie cinétique est nulle. Par suite :

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 + 0.$$

L'expression (1.6) de l'énergie mécanique conduit alors à :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}.$$

b) Période

Comme on l'observe sur la figure 1.2, le mouvement du mobile est oscillatoire et périodique : les valeurs de $x(t)$ se répètent à intervalle régulier. Mathématiquement cela provient de la périodicité des fonctions cosinus et sinus : $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$. Alors :

$$\cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t + 2\pi) = \cos\left(\omega_0 \left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right),$$

et de même : $\sin(\omega_0 t) = \sin\left(\omega_0 \left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right)$. Ainsi, on a :

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.7)$$

Cette relation signifie que le mouvement est périodique de période T_0 . La période ne dépend pas de l'amplitude du mouvement, c'est la propriété d'**isochronisme** des oscillations de l'oscillateur harmonique. On peut alors parler de période de l'oscillateur harmonique. T_0 augmente avec la masse m du mobile et diminue avec la constante de raideur k du ressort, ce qui est intuitif.

2 Signal sinusoïdal

2.1 Définition du signal sinusoïdal

Un **signal sinusoïdal** est un signal de la forme :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

où A et ω sont des constantes positives et φ une constante.

ω est la **pulsation** du signal, A son **amplitude**, et φ sa **phase initiale**.



Un signal sinusoïdal peut aussi être écrit sous la forme :

$$s(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où a et b sont deux constantes. C'est sous cette forme qu'on l'obtient naturellement en résolvant l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

Il faut savoir trouver la valeur de l'amplitude et de la phase initiale de ce signal. La relation de trigonométrie $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ (voir appendice mathématique) permet d'écrire : $A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t)$. On en déduit :

$$\cos \varphi = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = -\frac{b}{A} \quad \text{d'où} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (1.8)$$

puisque $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$.

Pour déterminer φ on peut utiliser la méthode suivante qui donne une valeur comprise entre $-\pi$ et π : il s'agit de $\arccos\left(\frac{a}{A}\right)$ si $\sin \varphi > 0$ et de $-\arccos\left(\frac{a}{A}\right)$ si $\sin \varphi < 0$.

2.2 Phase instantanée, phase initiale

L'argument de la fonction cosinus est appelée **phase instantanée**.

Le signal oscille entre $-A$ et A : il vaut A aux instants où la phase instantanée est égale à $2n\pi$ où n est un entier, il vaut $-A$ aux instants où elle est égale à $(2n + 1)\pi$, il vaut 0 et a une pente négative aux instants où elle est égale à $\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$, et il vaut 0 et a une pente positive aux instants où elle est égale à $\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi$. Ceci est illustré sur la figure 1.3.

La **phase initiale** φ donne la valeur de départ du signal à $t = 0$. Elle dépend de l'origine des temps choisie. De plus, le cosinus étant une fonction périodique de période 2π , la phase initiale n'est définie qu'à un multiple entier de 2π près. On peut ainsi toujours se ramener à une phase initiale comprise entre $-\pi$ et π .

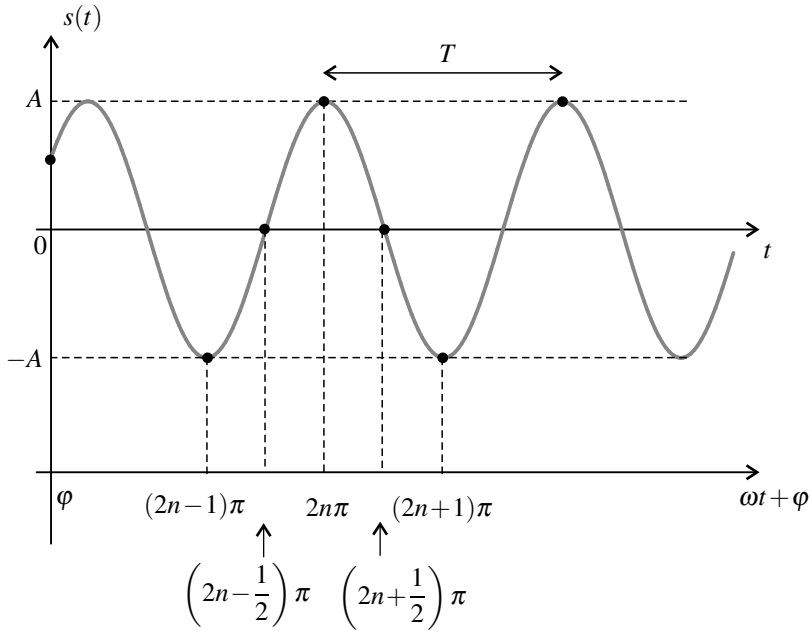


Figure 1.3 – Signal sinusoïdal. La valeur de la phase instantanée $\omega t + \varphi$ est indiquée en certains points, n est un entier.

2.3 Période, fréquence

a) Définitions

Un signal physique $s(t)$ est **périodique** s'il se répète dans le temps. Sa **période** T est la plus petite durée telle que :

$$s(t + T) = s(t).$$

La **fréquence** du signal :

$$f = \frac{1}{T}$$

est le nombre de répétitions du signal par unité de temps.

La période T se mesure en secondes (symbole s) ; la fréquence f se mesure en hertz (symbole Hz) : $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$.

b) Relations entre pulsation, période et fréquence

On a vu plus haut qu'un signal sinusoïdal est périodique de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Sa fréquence est donc reliée à la pulsation par les formules :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{ou} \quad \omega = 2\pi f.$$

c) Deux autres expressions du signal sinusoïdal

Le signal sinusoïdal $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ peut s'écrire aussi :

$$s(t) = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) \quad \text{ou} \quad s(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi).$$

2.4 Une interprétation géométrique

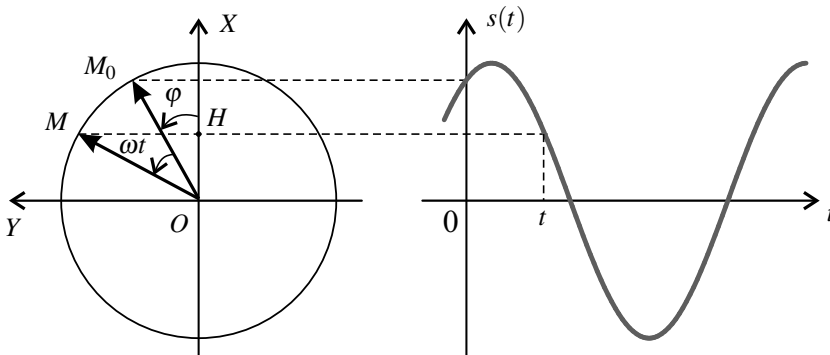


Figure 1.4 – Mouvement circulaire et signal sinusoïdal.

On peut donner du signal sinusoïdal $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ une image géométrique. On considère le cercle de rayon A centré à l'origine du repère orthonormé (OXY) (voir figure 1.4) et sur le cercle le point M_0 tel que l'angle entre le vecteur directeur \vec{u}_X de l'axe (OX) et le vecteur \vec{OM}_0 vaut φ . Soit un point M se déplaçant sur le cercle avec la vitesse angulaire ω et passant par M_0 à l'instant initial. L'angle entre le vecteur \vec{OM} et l'axe (OX) à l'instant t est $\theta(t) = \omega t + \varphi$ et l'abscisse de ce point est

$$X_M(t) = \overline{OH} = OM \cos \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = s(t).$$

Le signal sinusoïdal est ainsi l'abscisse d'un point tournant à la vitesse angulaire ω .

2.5 Représentation de Fresnel (MPSI)

a) Définition du vecteur de Fresnel

On associe au signal $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ un vecteur appelé **vecteur de Fresnel**, qui a une norme égale à A et qui fait, à l'instant t , l'angle $\omega t + \varphi$ avec l'axe des abscisses.

Ce vecteur tourne autour de l'origine à la vitesse angulaire ω (voir figure 1.5). Il s'agit du vecteur \vec{OM} du paragraphe précédent. Dans cet ouvrage le vecteur de Fresnel associé au signal $s(t)$ est noté \vec{S} .

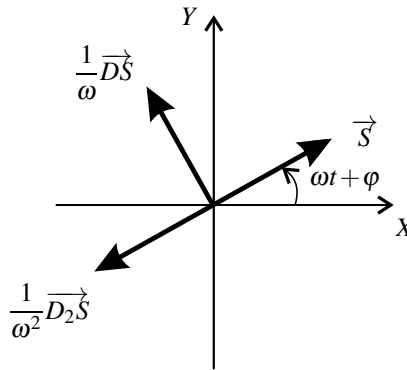


Figure 1.5 – Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal et ses deux premières dérivées. Les vecteurs $\vec{D}\vec{S}$ et $\vec{D}_2\vec{S}$ ont été multipliés respectivement par $\frac{1}{\omega}$ et $\frac{1}{\omega^2}$ pour une question d'homogénéité.

b) Vecteur de Fresnel du signal dérivé

La dérivée par rapport au temps d'un signal sinusoïdal $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ est aussi un signal sinusoïdal, en effet :

$$\frac{ds}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

L'amplitude de $\frac{ds}{dt}$ est égale à l'amplitude de $s(t)$ multipliée par ω et sa phase initiale est égale à la phase initiale de $s(t)$ augmentée de $\frac{\pi}{2}$. Ainsi :

Le vecteur de Fresnel associé à $\frac{ds}{dt}$ s'obtient à partir du vecteur de Fresnel associé à $s(t)$ en effectuant les opérations suivantes :

- on tourne le vecteur d'un angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique,
- on multiplie la norme du vecteur par ω (voir figure 1.5).

Le vecteur de Fresnel relatif à $\frac{ds}{dt}$ sera noté $\overrightarrow{D}\vec{S}$.

Si on dérive le signal deux fois, on tourne le vecteur d'un angle π et on multiplie sa norme par ω^2 . Ainsi le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{D_2}\vec{S}$ associé à $\frac{d^2s}{dt^2}$ est :

$$\overrightarrow{D_2}\vec{S} = -\omega^2 \vec{S}.$$

Cette relation n'est autre que l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique de pulsation propre ω dont le signal sinusoïdal est solution. Elle est visualisée sur la figure 1.5.

2.6 Déphasage

a) Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

On considère deux signaux sinusoïdaux : $s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.

On appelle **déphasage** du signal s_2 par rapport au signal s_1 la différence entre leurs phases instantanées :

$$\Delta\varphi(t) = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1.$$

Le déphasage est visible dans la représentation de Fresnel : il s'agit de l'angle allant du vecteur \vec{S}_1 au vecteur \vec{S}_2 (voir figure 1.6).

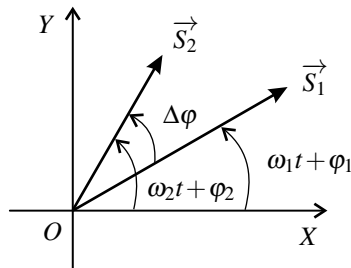


Figure 1.6 – Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux.

Quand les deux signaux sinusoïdaux ont la même fréquence (soit $\omega_1 = \omega_2$) leur déphasage est constant dans le temps et égal à la différence de leurs phases initiales :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Dans la suite on se place uniquement dans ce cas et on appelle ω la pulsation des deux signaux ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$).

b) Valeurs remarquables du déphasage

Les signaux sont dits **en phase** si $\Delta\varphi$ est égal à 0 ou $2n\pi$ avec n entier. Dans ce cas :

$$\cos(\omega t + \varphi_2) = \cos(\omega t + \varphi_1 + 2n\pi) = \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Les deux signaux passent par leurs valeurs maximales ou leur valeurs minimales en même temps, s'annulent en même temps. Les vecteurs de Fresnel ont à chaque instant même direction et même sens (voir figure 1.7).

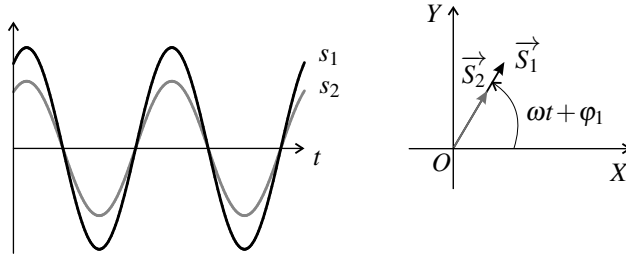


Figure 1.7 – Signaux sinusoidaux de même fréquence en phase.

Les signaux sont dits **en opposition de phase** si $\Delta\varphi$ est égal à π ou $(2n + 1)\pi$ avec n entier. Dans ce cas :

$$\cos(\omega t + \varphi_2) = \cos(\omega t + \varphi_1 + (2n + 1)\pi) = \cos(\omega t + \varphi_1 + \pi) = -\cos(\omega t + \varphi_1).$$

À un instant où l'un des signaux passe par sa valeur maximale, l'autre passe par sa valeur minimale. Il s'annulent en même temps mais l'un en croissant et l'autre en décroissant. Les vecteurs de Fresnel ont à chaque instant la même direction mais sont de sens opposés (voir figure 1.8).

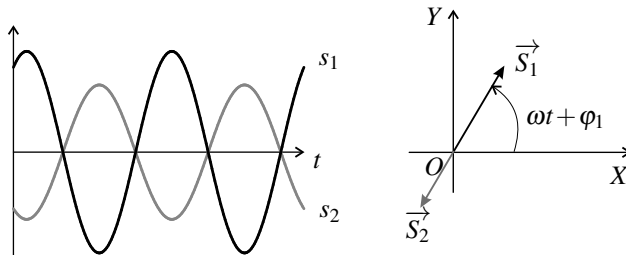


Figure 1.8 – Signaux sinusoidaux de même fréquence en opposition de phase.

Les signaux sont dits **en quadrature de phase** si $\Delta\varphi$ est égal à $\pm\frac{\pi}{2}$ ou $\left(2n \pm \frac{1}{2}\right)\pi$ avec n entier. Alors :

$$\cos(\omega t + \varphi_2) = \cos\left(\omega t + \varphi_1 + \left(2n \pm \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \cos\left(\omega t + \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(\omega t + \varphi_1).$$

À un instant où l'un des signaux passe par sa valeur maximale, l'autre passe par zéro et réciproquement. Les vecteurs de Fresnel sont orthogonaux à chaque instant. On parle de

« quadrature avance » ou « quadrature retard » selon que s_2 est en avance ($\Delta\varphi = +\frac{\pi}{2} + 2n\pi$) ou en retard ($\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$) sur s_1 (voir figures 1.9 et 1.10).

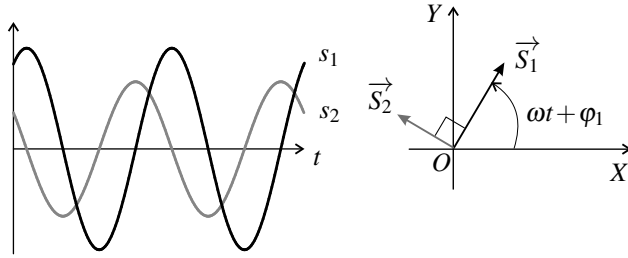


Figure 1.9 – Signaux sinusoïdaux de même fréquence en quadrature de phase. s_2 est en avance sur s_1 .

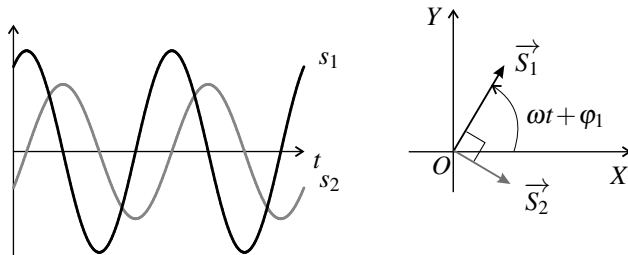


Figure 1.10 – Signaux sinusoïdaux de même fréquence en quadrature de phase. s_2 est en retard sur s_1 .

Remarque

La dérivée d'un signal sinusoïdal $s(t)$ est en quadrature avance sur $s(t)$. La dérivée seconde est en opposition de phase par rapport à $s(t)$. Un signal dont $s(t)$ est la dérivée (soit une primitive de $s(t)$), est en quadrature retard sur $s(t)$.

c) Mesure d'un déphasage

Expérimentalement on peut visualiser un signal en fonction du temps à l'aide d'un oscilloscope ou bien d'une carte d'acquisition reliée à un ordinateur. Pour cela, le signal doit être une tension électrique. Si le signal que l'on veut étudier n'est pas une tension, on utilise un capteur qui fournit une tension proportionnelle à ce signal.

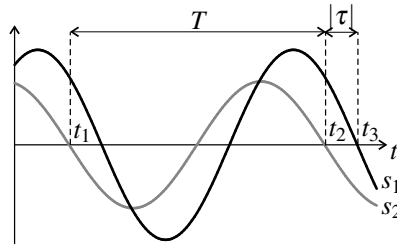


Figure 1.11 – Mesure du déphasage entre deux signaux sinusoïdaux.

La courbe donnant le signal au cours du temps est appelée **forme d'onde**. Dans le cas d'un signal sinusoïdal, on déduit de la forme d'onde :

- l'amplitude A , en mesurant la valeur maximale s_{\max} et la valeur minimale s_{\min} , par la formule : $A = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}$ (attention à ne pas oublier le facteur $\frac{1}{2}$);
- la période T , en mesurant les dates t_1 et $t_2 > t_1$ de deux annulations successives du signal avec la même pente (voir figure 1.11), par la formule : $T = t_2 - t_1$.

La phase initiale d'un seul signal sinusoïdal a peu d'intérêt pratique car elle dépend du choix de l'origine des temps. En revanche, le déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence est souvent une information importante.

Le déphasage est lié au décalage temporel entre les deux signaux. En effet :

$$\cos(\omega t + \varphi_2) = \cos(\omega t + \varphi_1 + \Delta\varphi) = \cos\left(\omega\left(t + \frac{\Delta\varphi}{\omega}\right) + \varphi_1\right) = \cos(\omega(t + \tau) + \varphi_1),$$

formule où apparaît le décalage temporel entre les deux signaux :

$$\tau = \frac{\Delta\varphi}{\omega}.$$

La mesure de τ conduit à la valeur de $\Delta\varphi$. Pour cela on repère : deux dates t_1 et t_2 consécutives en lesquelles la courbe s_2 s'annule avec la même pente, une date t_3 la plus proche possible de t_2 où le signal s_1 s'annule avec une pente du même signe (voir figure 1.11). On en déduit :

- la période du signal : $T = t_2 - t_1$;
- le décalage temporel : $\tau = t_3 - t_2$;
- le déphasage de s_2 par rapport à s_1 : $\Delta\varphi = \omega\tau = 2\pi\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$.

La valeur du déphasage obtenue par cette méthode est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Elle est positive si $s_2(t)$ est en avance sur $s_1(t)$ (cas de la figure 1.11) et négative si $s_2(t)$ est en retard.



Il faut contrôler le signe du résultat en observant le chronogramme : s_2 est en avance sur s_1 si, entre t_1 et t_2 , il atteint son maximum avant s_1 .

d) Utilisation de l'oscilloscope en « mode XY »

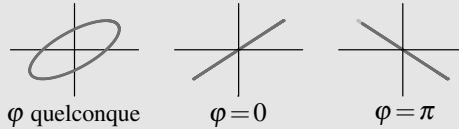
Lorsqu'on utilise un oscilloscope en « mode XY » on observe une courbe formée par les points donc l'abscisse est $X(t) = s_1(t)$ et l'ordonnée $Y(t) = s_2(t)$.

Dans le cas où $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont deux signaux sinusoïdaux, cette courbe est, pour un déphasage quelconque, une ellipse (voir annexe mathématique).

Si ces signaux sont en phase on a : $s_2(t) = \frac{A_2}{A_1}s_1(t)$ soit $Y(t) = \frac{A_2}{A_1}X(t)$. La courbe observée est donc une droite de pente positive.

Si ces signaux sont en opposition de phase on a : $s_2(t) = -\frac{A_2}{A_1}s_1(t)$ soit $Y(t) = -\frac{A_2}{A_1}X(t)$. La courbe observée est donc une droite de pente négative.

L'utilisation de l'oscilloscope « en mode XY » permet de repérer facilement des signaux en phase ou en opposition de phase :



SYNTHÈSE*SAVOIRS*

- équation différentielle de l'oscillateur harmonique
- expression de la pulsation de l'oscillateur constitué par une masse accrochée à un ressort
- définitions d'un signal sinusoïdal, de son amplitude, sa pulsation, sa phase initiale
- relations entre la pulsation, la fréquence et la période
- représentation de Fresnel

SAVOIR-FAIRE

- établir l'équation différentielle d'une masse accrochée à un ressort
- résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique avec des conditions initiales données
- trouver l'amplitude et la phase initiale de la solution
- vérifier la conservation de l'énergie mécanique
- reconnaître l'amplitude, la phase initiale, la période, la fréquence, la pulsation d'un signal sinusoïdal donné
- trouver la phase instantanée à un instant où le signal est maximal, minimal, nul
- dessiner une représentation de Fresnel (MPSI)
- déterminer expérimentalement un déphasage

MOTS-CLÉS

- | | | |
|--------------------------|-------------|-----------------------------|
| • oscillateur harmonique | • période | • vecteur de Fresnel |
| • signal sinusoïdal | • fréquence | • conservation de l'énergie |
| • amplitude | • phase | |
| • pulsation | • déphasage | |